

## Lista zadań - CAŁKA OZNACZONA I NIEWŁAŚCIWA<sup>1</sup>

1. Obliczyć całki oznaczone

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} \int_2^e \frac{1}{x-1} dx & \text{b)} \int_{-2}^2 (x-1)(x^2-2) dx & \text{c)} \int_0^2 \frac{x}{x^2+1} dx & \text{d)} \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx \\
 \text{e)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx & \text{f)} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (x-1)(x^2-2) dx & \text{g)} \int_{-1}^1 (e^x + e^x) dx & \text{h)} \int_0^1 e^{2x+1} dx \\
 \text{i)} \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1} dx & \text{j)} \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx & \text{k)} \int_0^{\pi} (1 + \cos x)^2 dx & \text{l)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \cos \frac{x}{2} dx \\
 \text{m)} \int_0^{\pi} e^x \cos 2x dx & \text{n)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x} dx & \text{o)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{3 + \sin^2 x} dx & \\
 \text{p)} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx & \text{q)} \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2-x+1} dx & \text{r)} \int_0^{\sqrt{3}} x \arctg x^2 dx & 
 \end{array}$$

2. Zbadać zbieżność całek niewłaściwych i obliczyć ich wartości, gdy są zbieżne:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} \int_1^{\infty} \frac{2}{x} dx & \text{b)} \int_{-\infty}^0 e^{-x} dx & \text{c)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} dx & \text{d)} \int_1^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx \\
 \text{e)} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^3)^2} dx & \text{f)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctg^2 x}{1+x^2} dx & \text{g)} \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx & \text{h)} \int_1^{\infty} \frac{\arctg x}{x^2} dx \\
 \text{i)} \int_0^1 \ln x dx & \text{j)} \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx & \text{k)} \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} dx & \text{l)} \int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^3}} dx \\
 \text{m)} \int_0^1 \frac{x+3}{\sin^2 x} dx & \text{n)} \int_0^2 \frac{1}{x^2-4x+3} dx & \text{o)} \int_0^1 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}} dx & 
 \end{array}$$

3. Obliczyć pola obszarów ograniczonych liniami:

$$\begin{array}{l}
 \text{a)} y = 5x^2 - 6x, y = 0, x = -1, x = 1; \\
 \text{b)} y = \frac{1}{x}, 1 \leq x \leq, y = 0; \\
 \text{c)} y = \ln x, \frac{1}{2} \leq x \leq 1, y = 0; \\
 \text{d)} y = x^2 + 1, y = 3 - x; \\
 \text{e)} y = 3x - x^2, y = -x; \\
 \text{f)} y = \sin x, y = \frac{2}{\pi}; \\
 \text{g)} y = \sin 2x, y = \sin x, 0 \leq x \leq \Pi; \\
 \text{h)} y^2 = 6 - x, y = x; \\
 \text{i)} y = e^x, y = e^{-x}, x = 1.
 \end{array}$$

4. Obliczyć długości następujących łuków:

$$\begin{array}{l}
 \text{a)} y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), x \in \langle -a, a \rangle, a > 0; \text{ b)} y = \ln(\sin x), x \in \langle -\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \rangle \\
 \text{c)} y = \frac{x^2-2}{2}, x \in \langle \sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle.
 \end{array}$$

5. Obliczyć objętość brył powstałych przez obrót wokół osi OX zadanych krzywych:

$$\begin{array}{l}
 \text{a)} y = \text{ctg } x, \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\
 \text{b)} y = \ln x, 1 \leq x \leq e; \\
 \text{c)} y = e^{-x}, 0 \leq x \leq 1; \\
 \text{d)} y = x^2 \sin x, 0 \leq x \leq \pi; \\
 \text{e)} y = \frac{1}{x}, x \geq 1.
 \end{array}$$

6. Obliczyć pola powierzchni brył obrotowych powstałych z obrotu krzywych wokół osi OX:

$$\begin{array}{l}
 \text{a)} y = 6x, x \in \langle 0, 1 \rangle; \\
 \text{b)} y = \frac{x^3}{3}, x \in \langle -1, 1 \rangle; \\
 \text{c)} y = \sin x, x \in \langle 0, \pi \rangle; \\
 \text{d)} y = e^{-x}, x \in \langle 0, \ln 2 \rangle.
 \end{array}$$

<sup>1</sup>Literatura: K. Jankowska, T. Jankowski, "Zbiór zadań z matematyki"