

Lista 1 (liczby zespolone)

Zad 1. Następujące liczby zespolone przedstawić w postaci algebraicznej:

A) $(4 - 3j) + (2j - 6)$ B) $\frac{5}{2-j}$ C) $\frac{-1-4j}{4-j}$ D) $\frac{1+2j}{3-4j} + \frac{2-j}{5j}$ E) $\frac{(1+j)^2}{(1+2j)^2}$

Zad 2. Poniższe liczby zespolone przedstawić w postaci algebraicznej:

a) 3 b) -4 c) $-3j$ d) $2 + 2\sqrt{3}j$ e) $1 + j$
f) $1 - j$ g) $-5 - 5j$ h) $1 + \sqrt{3}$ i) $-\sqrt{2} - j\sqrt{2}$ j) $-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

Zad 3. Dla $z = x + jy$ wyznaczyć rozwiązanie równań:

a) $(2 + 3j)z = -4 + 7j$ b) $(3 + 4j)^2 - 2\bar{z} = z$ c) $\left(\frac{1+j}{1-j}\right)^2 + \frac{1}{z} = 1 + j$ d) $|z| + \bar{z} = 3 + 4j$

Zad 4. Narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających podane warunki:

a) $|z - 3 + 4j| = 1$ b) $\left|\frac{z-2j}{z+1}\right| = 1$ c) $2 \leq |jz - 5| < 3$ d) $|z + 1 - 2j| \geq 3$ oraz $|z - 3| < 4$
e) $\left|\frac{z+j}{z^2+1}\right| \geq 1$ f) $|\text{Arg}(z)| = \frac{5}{4}\pi$ g) $\text{Arg}(z^6) = \pi$ h) $\frac{\pi}{3} < \text{Arg}(-z) \leq \frac{\pi}{2}$

Zad 5. Korzystając z definicji obliczyć podane pierwiastki:

a) $\sqrt{5 - 12j}$ b) $\sqrt{-11 + 50j}$ c) $\sqrt[3]{j}$ d) $\sqrt[4]{16}$ e) $\sqrt{5 + 4j}$ f) $\sqrt{6 + 8j}$ g) $\sqrt{8 + 4\sqrt{5}j}$

Zad 6. Obliczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej podane pierwiastki algebraiczne:

a) $\sqrt{-1 + \sqrt{3}j}$ b) $\sqrt[3]{-27j}$ c) $\sqrt[4]{-4}$ d) $\sqrt[6]{-64}$ e) $\sqrt[5]{32j}$ f) $\sqrt[3]{-1 + j}$ g) $\sqrt[3]{2 + 2j}$

Zad 7. Korzystając ze wzoru Moivre'a następujące liczby zespolone przedstawić w postaci algebraicznej:

a) $\left(\frac{1+j\sqrt{3}}{1-j\sqrt{3}}\right)^{10}$ b) $(1 - j)^{20}$ c) $\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{31}$ d) $\frac{(\sqrt{3}-j)^{12}}{(1+j\sqrt{3})^9}$ e) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{j}{2}\right)^{100}$

Zad 8. Wyrazić poniższe funkcje za pomocą $\sin \varphi$ i $\cos \varphi$:

a) $\cos 3\varphi$ b) $\sin 3\varphi$ c) $\cos 4\varphi$ d) $\sin 4\varphi$ e) $\frac{\sin 5\varphi}{\sin \varphi}$ $\frac{\cos 5\varphi}{\cos \varphi}$

Zad 9. Wyznaczyć rozwiązania równań:

a) $x^2 + 2x + 4 = 0$ b) $x^2 - 4x + 5 = 0$ c) $x^2 + 36 = 0$ d) $x^2 - 2x + 10 = 0$
e) $x^2 + (1 + 4j)x - (5 + j) = 0$ f) $x^2 - 3x + 3 + j = 0$ g) $x^3 - 8 = 0$ h) $x^2 + (1 + j)x + 5j = 0$
i) $x^3 + (2j - 3)x^2 + (5 - j)x = 0$

Literatura

K. Jankowska, T. Jankowska, "Zadania z matematyki wyższej", Wydawnictwo PG.

T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, "Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania", Oficyna Wydawnicza GiS.